

第2学年 数学科学習指導案

指導者 佐藤 治彰

1. 教材名 「奇偶算」 (課題学習)

2. 題材について

(1) 教材観

「奇偶算」は1743年に中根彦循(なかねげんじゅん)が著した『勘者御伽雙紙』に載せられている問題である。その問題文を上垣渉氏は次のように要約している。「基石がたくさんある。1個, 3個, 5個, 7個, …と奇数個ずつ基石をとっていくと7個余り, 2個, 4個, 6個, 8個, …と偶数個ずつ基石をとっていくと2個余るという。基石は何個あるのか。」問題文が簡単に把握でき, 単純に解くことができそうであるが, 考え出すと難しさや煩わしさを感じる問題であるとする。その理由として, 総数がわからないところから引いていくという場面設定や, 引いていく数が一定ではなく増えていくことがあげられる。

和田義信氏は思考について, 「思考を働かせるためには, 習慣的手段によっては解決し得ないような状況に置かれることが大切である。例えば, 計算練習を何度繰り返しても, 思考力を高めることはできない。何らかの形で, 習慣的手段によってでは解決できないようなことを要求しなくてはいけない。そのためには, 例えば, ありきたりのやり方とそうでないやり方を二つ要求するというようなことでもよい。」としている。

「奇偶算」では, 求めたいものを文字で置き, 方程式をたてて解くというこれまでの方法が利用できないという壁にあたる。しらみつぶしに探したり, 表でまとめたりすることで, 答えを導き出そうとすると考える。また, 効率よく解く手立てを考察する中で, 奇数個ずつ取っていくとその和は平方数になることを把握するために, 数を操作したりドット図で表したりと様々な手法を使うことになる。ありきたりのやり方だけでなく, 様々な手法を考えることになるため, 「奇偶算」は思考を働かせる場面になりうる問題であると考えられる。また, ここで操作するドット図は, 面積図への掛け渡しになったり, 奇数の和をドット図から考える経験をしておくことで, 平方数と正方形の面積との関係が作られたりする。これらのことは, 3年次に行う展開や因数分解, 平方根などの学習における代数的な処理と幾何的な処理への繋がりがもてると考えている。

(2) 生徒観

生徒はこれまでに, 文字式の計算, 1元1次方程式, 2元1次連立方程式などの学習を行っている。方程式や, 文字式を用いた説明において, 文字を用いることの有用性に気付き, 文字を扱うことへの抵抗は少なくなっていると考えられる。また, 計算したり, 方程式を解いたりすることに意欲的に取り組む姿が見られる。文字式の計算では2次式を扱うこともあるが, 方程式は1次式までしか扱っていない。また求めたいものを文字で置き方程式をたてることが多く, 求めたいもの以外を文字で置かなければならない状況はこれまでに経験していない。

(3) 指導観

課題把握時に注意すべきことは、奇数個ずつ取るときと偶数個ずつ取るときの両方とも、同じ数の基石から取っていることを意識させることと考えた。これは元の基石の数が未知数のため、変数を意識してしまう生徒も出てくると考えられるからである。そこで、課題提示の際には最初の基石が固定された未知数であることが意識できるよう、佐藤健一著『中学数学で解ける和算百話』で出題されている形式をとった。

自力解決の時間では、単に問題の答えを求めただけにとどまらず、他に方法はないのか、より効率よく解く方法はあるのかなどを考えさせるため、多くの時間を確保する。その中で、奇数個ずつ取っていくとき、その和が平方数になることに気付かせたい。数値の作業から平方数が意識できたら、奇数個ずつ取っていった基石をどう並べることで平方数が意識しやすいかを考えさせ、正方形の形へと導いていく。この代数的処理と幾何的処理を見比べながら考えることで、平方数と正方形の面積の関連づけを強くさせたい。このことが、偶数の和や「奇偶算」の解法への元にもなるからである。また、3年次に学習する多項式の計算、平方根での学習へとつながっていく場面にもなる。

偶数の和をドット図で考えさせる際には、小グループの活動を取り入れる。理由は次の二つである。一つ目は、様々な視点や考え方を共有することで、手がかりを発見しやすくしたり、新しい方法を見つける時間を短縮させたりするために取り入れる。二つ目は、思考を要する問題の解答を発表させる際に発言しやすくするためである。これは、自信がないと発表を渋る傾向のある生徒集団のため、同じ考えの仲間がいることを通し、その意見に自信をもたせることで、発言しやすくなると考えている。

3. 指導目標

- ・奇数の和が平方数になることに気づき、ドット図と関連させて考えることで正方形の面積との関連を意識する
- ・奇数の和が正方形の面積と関連することを元にして、偶数の和を長方形の面積と関連して考えることができる
- ・奇数の和と偶数の和を数値の操作やドット図で表したことを元にして、より効率的に解く方法を導き出す

4. 評価基準

評価項目	C	B	A
「奇偶算」をさまざまな方法で整理しながら、より良い解法を導き出す	奇偶算の解き方を、数値の操作を通して考えることができる	奇偶算を、数値を操作したり、図で整理したりして解き方を考えることができる	奇偶算の解き方を、数値や図を用いて考え、文字を使用してまとめることができる

5. 指導計画

○ねらい ・学習活動	評価規準	評価方法
○「奇偶算」をさまざまな方法で整理しながら、より良い解法を導き出す ・数値の操作やドット図への整理を通して、奇数の和が平方数になることを確認する ・偶数の和について、奇数の和を元に考察する ・奇数と偶数のそれぞれの和について考えたことを元に、効率の良い解き方を導こうとする	数学的思考力	学習シート

6. 本時の授業

(1) 日 時 平成28年7月1日（金） 14:10～15:00

(2) 場 所 山梨大学教育学部附属中学校 2年4組教室（2階）

(3) 本時の目標

- 奇数の和が平方数になることに気付き、ドット図で基石の取り方を整理することを通して、平方数と正方形の面積を関連させて考えることができる
- ・奇数の和と偶数の和を表すドット図から、より効率の良い解き方を導こうとする

(4) 本時で期待する生徒の姿

「奇偶算」の答えを出した状態から、様々な解き方を考えたり、それらを比べたりしながら、より効率的に解く方法を探し出す姿を本時では目指している。探し出す中で、数値の操作やドット図への整理を行い、それらを見比べる中で平方数と正方形の面積の関連に気付いてもらいたい。そこで学んだことが中学校第3学年で行う学習への架け橋になると考えている。さらに、そのことを利用して偶数の和を求めたり、余りに着目して解く方法へつなげたりしてもらいたい。

(5) 本時で期待する生徒の姿を引き出すための手立て

①「深く考える」授業のための題材

今回は「奇偶算」を用いることにした。その理由として、先にも述べたように問題文の把握が容易であるため、とりあえず解こうという気持ちを持ちやすいと考える。しかし、解き始めてみると構造としては複雑なものであり、深く考える必要に迫られる。その際、出てきた値を表で整理したり、式で整理したり、図で表したりする作業も大切にさせたい。その作業を通しながら、奇数の和や偶数の和と正方形や長方形の面積との関連に気付かせたい。

②「視点を変える」活動

答えを出すためには、数値を操作する代数的処理だけで十分に答えを導くことができると思われる。そこから「視点を変える」活動として、図で整理する幾何的処理を行わせる。これにより、平方数と正方形の面積との関連に気付くことができ、これからの学習への素地となると考える。

また、この課題を考えていく上でも、奇数の和と偶数の和のドット図を見比べることは、重要な手がかりを発見するのにも必要となってくる。

逆に、幾何的处理を行いながら課題解決をはかる生徒にとって、代数処理を行うことで課題解決できることを知ることも「視点を変える」活動と言える。2つの処理を関連付けながら考えられるようになっていくことが、この和算の解法を導く手立てにもなるため、大切にしたい。

③「視点を変える」活動を効果的にする教師のはたらきかけ

自力解決の時間を多く取り、他の方法を考えさせることによって、さまざまな方法で解こうとすると考える。その中には、数値を操作したり図で整理したりするなど自然と代数処理から幾何処理へと移行する生徒も出てくると思われる。全体での指導の中では、数値の操作を通し平方数に気付いた生徒が現れたら、それを全体で共有し、碁石の並べ方の工夫を考えさせる。そこで、代数処理から幾何処理へと「視点を変える」ことになる。

(6) 展 開

過程	指導内容及び学習活動	予想される生徒の反応	留意点
導入	1. 課題①の把握		
	<p>課題① 「さくらさん『この袋の中からいくつかの碁石を取り出してください。』 ゆうとさんは自分の前に取り出した碁石を置きます。 さくらさん『取り出した石の山から1個、3個、5個というように2個ずつ多く取って横に置いてください。どうぞ』 ゆうとさんは1個、3個、5個、…というように奇数個を順に取って横へ置いていきます。初めの山から石は次第に減り、取れなくなりました。 ゆうとさん『これ以上は取れません。7つ残りました。』 さくらさん『では、全部初めの山に戻して、今度は2個、4個、6個、…というように偶数個を取ってください。』 ゆうとさんは2個、4個、6個、…というように取り除いていきます。 さくらさん『今度はいくつ余りましたか。』 ゆうとさん『2つ余りました。』 では、ここで問題です。ゆうとさんは初めにいくつの碁石を取り出しましたか。』</p>		
	○以下の2点をおさえる ・最初に取り出した碁石の数は変わらない ・碁石は取れなくなるまで取る		・碁石を利用し、取り方を確認させる。
展開①	2. 自力解決 ○さまざまな方法で奇偶算に挑戦し、答えを導き出す	※予想される反応例は別紙参照	・答えが出た生徒には他の方法を考えさせる。

	<p>3. 発表</p> <p>○自分の解き方と答えを発表する</p> <p>○気付いたことの見聞交換をする</p> <p>○奇数個ずつ取った碁石の総数が平方数になることがわかりやすい碁石の並べ方を考える</p> <p>4. まとめ</p> <p>○奇数個ずつ取った和は、取った回数の平方と等しくなる</p> <p>5. 課題②の把握</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・奇数個ずつ取るとき余りが7だから、奇数個ずつ取るとき最後は7つ以上取っている。 ・偶数個ずつ取る方が、常に1つ多く取ることになる ・奇数個ずつ取った和が平方数になる ・碁石をピラミッドの形に並べて、台形の面積の公式にあてはめる ・碁石を正方形の形に並べて、正方形の面積の公式にあてはめる 	
展開②	<p>課題② 「偶数個ずつ取ったときの和は、どうなるでしょうか。」</p>		
	<p>6. 自力解決→グループ討議</p> <p>○各自の解き方を持ち寄り、それらを参考にして求め方を工夫し、発表できるようにまとめる</p> <p>7. 発表</p> <p>○グループでまとめた考えを発表する</p>	<ul style="list-style-type: none"> ・台形の面積の公式で求めることができる ・長方形の面積の公式で求めることができる ・奇数個の和に、5（取った回数）を加えると求めることができる 	<p>○画用紙とペンの配付</p>
まとめ	<p>8. 授業感想の記入</p> <p>レポート課題</p> <p>「余りの7と2から、初めに渡した碁石の総数を求めることはできないか。」</p>	<p>確認用の課題</p> <p>奇数個ずつ取ったときの余り11個</p> <p>偶数個ずつ取ったときの余り4個</p> <p>総数は60個</p>	

※予想される生徒の反応例

①求めたいものを文字でおき，方程式をたてる

$$\begin{cases} x-1-3-5-\dots=7 \\ x-2-4-6-\dots=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=7+1+3+5+\dots \textcircled{1} \\ x=2+2+4+6+\dots \textcircled{2} \end{cases} \quad \textcircled{1}-\textcircled{2} \text{より } 0=5-1-1-1-\dots$$

等式が成り立つためには， -1 が5つだから $\begin{cases} x=7+1+3+5+7+9=32 \\ x=2+2+4+6+8+10=32 \end{cases}$ よって32個

②同数になるまでしらみつぶしに計算する

②-1 $1+7=8$
 $2+4+2=8$ (取れなくなるまで取っていないことから間違いである)

②-2 $1+3+5+7+7=23 \rightarrow 1+3+5+7+7=23 \rightarrow 1+3+5+7+9+7=32$
 $2+4+6+8+2=22 \rightarrow 2+4+6+8+10+2=32 \rightarrow 2+4+6+8+10+2=32$
 よって32個

③総数を1つずつ増やしていく

総数	奇数個の取り方	偶数個の取り方	余りの組
1	1	0	0, 1
2	1	2	1, 0
3	1	2	2, 1
4	1+3=4	2	0, 2
5	1+3=4	2	1, 3
6	1+3=4	2+4=6	2, 0
7	1+3=4	2+4=6	3, 1
8	1+3=4	2+4=6	4, 2
9	1+3+5=9	2+4=6	0, 3
10	1+3+5=9	2+4=6	1, 4
11	1+3+5=9	2+4=6	2, 5
12	1+3+5=9	2+4+6=12	3, 0
13	1+3+5=9	2+4+6=12	4, 1
14	1+3+5=9	2+4+6=12	5, 2
15	1+3+5=9	2+4+6=12	6, 3
31	1+3+5+7+9=25	2+4+6+8+10=30	6, 1
32	1+3+5+7+9=25	2+4+6+8+10=30	7, 2

④奇数の和が平方数になることに注目して解く

$$1+7=8$$

$$2+4+2=8 \quad (\text{取れなくなるまで取っていないことから間違いである})$$

$$4+7=11 \quad 9+7=16$$

$$2+4+2=8 \quad \rightarrow \quad 2+4+6+2=14$$

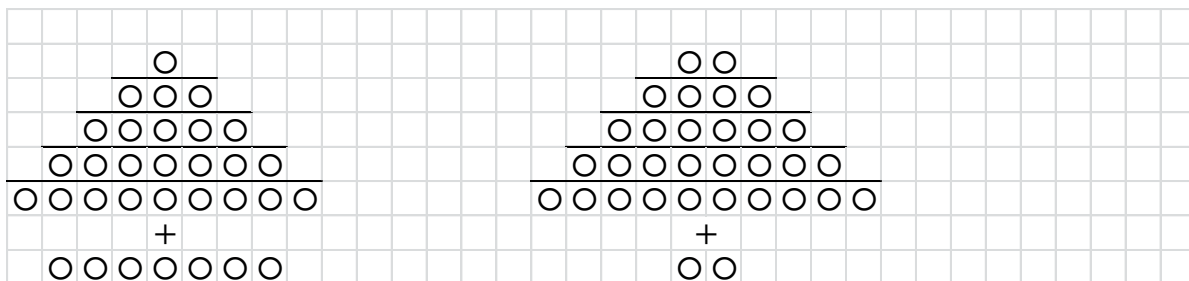
$$2+4+6+2=14 \quad 2+4+6+8+2=22$$

$$16+7=23$$

$$\rightarrow 2+4+6+8+2=22 \quad \rightarrow \quad 25+7=32$$

$$2+4+6+8+10+2=32 \quad 2+4+6+8+10+2=32$$

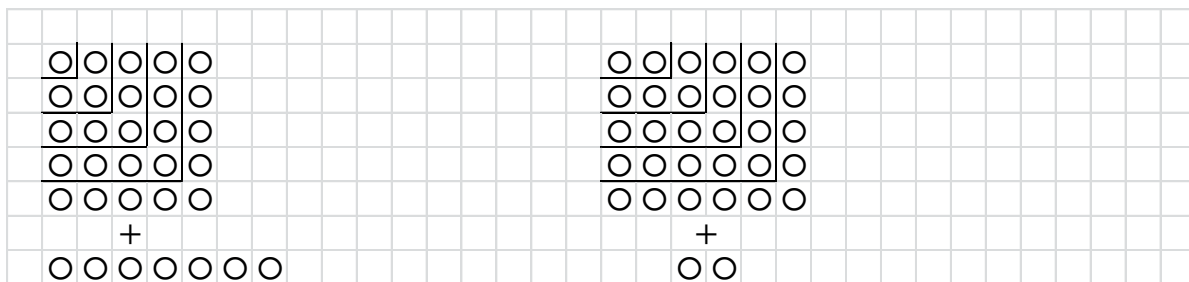
⑤取った基石を三角形に並べて整理する



$$\frac{(1+9) \times 5}{2} + 7 = 25 + 7 = 32$$

$$\frac{(2+10) \times 5}{2} + 2 = 30 + 2 = 32$$

⑥取った基石を四角形に並べて整理する



$$5^2 + 7 = 25 + 7 = 32$$

$$5 \times 6 + 2 = 30 + 2 = 32$$

⑦取った回数に注目する

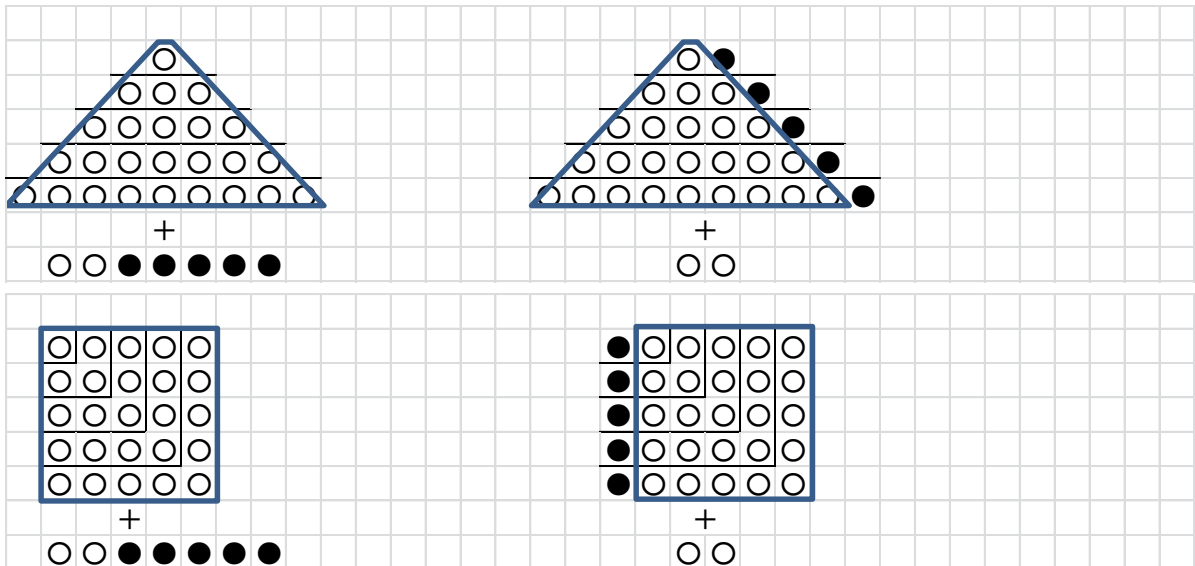
(1)予想②において、奇数個ずつ取ったときの余りが7つあることから、奇数個ずつ取るときの最後の個数は7つ以上取っている。つまり、4回以上は取ることになる。

(2)予想①より、偶数個ずつ取る作業は、取るごとに奇数個よりも1つ多く取っていることになり、

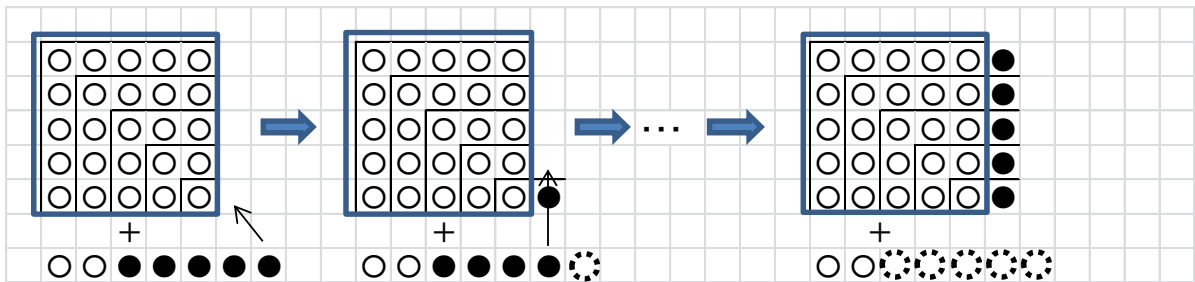
その分余りに差が出ている。つまり余りの差が取る回数になっている。式で表すと次のとおりになる。

$$\begin{aligned}
 &1+3+5+7+9+7=32 \\
 &2+4+6+8+10+2 \\
 &=(1+1)+(3+1)+(5+1)+(7+1)+(9+1)+2 \\
 &=1+3+5+7+9+5+2
 \end{aligned}$$

(3)予想⑤, ⑥より, 余りの差と取る回数が等しいことを見いだす。



(4)(2)と(3)より, 奇数個ずつ取ったときの余り基石から一つずつ加えていくことで偶数の和を表す図が作れることに気付く。



※その他の解き方

⑧取った回数を n 回として, 方程式をたてる

$$n^2 + 7 = n(n+1) + 2$$

$$n^2 + 7 = n^2 + n + 2 \quad \text{よって} \quad 5^2 + 7 = 32$$

$$n = 5$$

⑨取った回数は余りの差と等しいことから, 余りの差を二乗して奇数個取ったときの余りを加える

$$(7-2)^2 + 7 = 25 + 7 = 32$$

※引用参考文献

1. 『和田義信著作・講演集4 講演集（2）考えることの教育』
和田義信著作・講演集刊行会編集 東洋館出版社
2. 『中学校 和算で作る おもしろ数学授業』 上垣渉編著 明治図書
3. 『中学数学で解ける 和算 百話』 佐藤健一著 東洋書店