数学科研究主題

学びを新たな課題につなげる授業の創造

～「作業」を重視した授業を通して～

萩原喜成　　井上　透　　櫻井順矢

1　テーマ設定の理由

本校数学科で目指す生徒像は，１つのことにこだわりを持ち，じっくりと腰を据えて粘り強く考える力を持つ生徒である。たとえ素晴らしい解決に至らなくても，課題に対してあきらめずに，前向きに挑戦する生徒を育てたいのである。そのためには，日々の実践の中で，考えさせる授業を展開しなければならない。そのような実践の積み重ねを通して，少しずつ目指す生徒像に近づくようにしたい。

考えさせるといってもそう簡単ではない。生徒が考えたくなるような必然性のある課題を設定し，生徒をその課題の解決に集中させなければならない。一般的な思考過程というものは存在せず，個人によって内容によって，さまざまなアプローチで考えていく。まず生徒に十分に考える場を与えることが大切なのである。本校数学科では，考えさせる授業を実践するために，これまで「作業」を重視した授業づくりを具体的方策として，平成１３年度から平成23年度までの11年間にわたり，研究を重ねてきた。「作業」を重視することによって，次のような利点があると考えたからである。

（１）ものをつくったり，手にとって観察したりすることで，生徒の思考が促される。また，別々に身に付けていた知識や性質どうしの関係，既有の知識と新たな課題との関係を捉えるときの重要なてがかりを得ることにつながる。そのことで，さらに思考が促されることになる。

（２）生徒は既有の知識や知恵を総動員して考える場面を得ることで，その解決を通して，考える楽しさや解決できたときのよろこびを味わうことができる。それが，課題に対してあきらめず，粘り強く取り組む姿勢を育てることにつながる。

（３）数学という教科の特性上，抽象的な思考の場面が多くかつ生徒の思考の様相は多種多様で，ひとりひとりの考えを教師がしっかり把握するのは困難なことである。しかし，作業を重視することで生徒の考えは，活動の中やノート上などに現れやすくなる。教師はその考えを把握しやすくなるのである。把握したものを生徒個人にフィードバックすることで，生徒に自分の思考過程を意識化させることができる。そのことは，個々に応じた指導にもつながる。

ここでいう「作業」とは古くはペスタロッチらの教育学における「労作」という言葉からきている。農作業等のように，実際に身体を使ってものをつくり，汗をかいて働くことによって，人格が形成され，直観が養われるというものである。「作業」を数学の授業で重視するというのは，生徒自身が問題解決のために，五感を研ぎ澄まし，もてる力を総動員して課題に取り組むような学習活動を指している。具体的には，手を使ってものをつくったり，丁寧に図をかいたり，それを様々な視点から観察したりなどして，試行錯誤をしながら，生徒の思考が促されていく。このような活動全体を指して「作業」としている。生徒たちは「作業」を通して，問題における様々な関係を整理し，具体化させ，新しい場面でそれを使っていくのである。考えさせる授業において，「作業」を重視するよさは普遍的なものであるといえる。これからも基本方針として「作業」を重視した授業づくりを継続していきたい。

本校数学科の新たな研究の方向性として，「作業」を重視した授業についての研究を通して見えてきた教材どうしのかかわりを，生徒が学びの中で感じ取り，次の学びにつなげていけるような授業の創造を目指していきたい。そのためには，授業の課題をいかに生徒自身の課題として捉えさせられるかが重要ではないかと考えた。つまり，数学的に豊かな教材を開発することを前提として，その教材をどのような課題として提示し，どう授業として仕組んでいき，さらに，それをどう生徒自身の課題にさせていくのかが重要である。このことはこれまでの研究においても「授業における教師の役割」として大切にしてきたことであり，また，課題でもあった。良い教材を開発したところで，それをどう生徒に考えさせる授業として昇華させるかは，授業中における教師の働きかけにかかっている。このことはこれまでの「作業を重視した授業の創造」における研究でも重視してきたことであるが，教材開発への視点が中心となりがちで，教材を開発はしたものの，それを授業化した際における教師の役割がクローズアップされてこなかったことが課題としてあげられてきた。そこで，研究主題を「学びを新たな課題につなげる授業の創造」，副主題として「『作業』を重視した授業を通して」とし，これまでの研究を踏襲しつつも，

授業における教師の役割に視点を当てていく方向性を前面に打ち出そうと考え，研究主題を変更した。

2　本研究の目的

本研究の目的は，生徒に「考える力」をつけさせることである。ここでいう「考える力」とは，１つの課題に対して，様々な試行錯誤をしながらも粘り強く考え続けることができる力をつけることであり，さらには１つの課題を解決したあとに,「なぜこれでよいのだろうか」「何を根拠にしているのだろうか」「より簡単に解決できる方法はないだろうか」「他にも言えることはないだろうか」「学んだことはいつでも言えるのだろうか」などの新たな問いを見いだし，その解決に挑戦していく力をつけることである。他から与えられた課題ではなく生徒自らが考え設定した課題であれば，より自発的に既有の知識や五感を総動員させて，試行錯誤を重ねながらも解決しようと考えるはずである。生徒にそのような問いをもたせるような授業をつくり出すことができれば，より一層考えることに重きをおいた指導ができると考える。そのために,「作業」を重視した良い教材を開発し，それを教師の働きかけによって，思考が深まり，新たな課題につながるような授業を展開しなければならないと考える。

3　全体研究とのかかわり

(1)　生徒につけさせたい力とそれらを育むために生徒にもたせたい問い

目的にもあるように，数学科として生徒につけさせたい力は「考える力」である。そのためには,「作業」を重視した教材開発の上に立ち，教師が適切な働きかけをすることが大切である。「作業」を重視した数学の授業を実現するには，よい課題が大切である。生徒が解決せずにはいられないような状況を作り出し，数学的に豊かな内容を含むような課題でなければならない。また，生徒の思考を促し，妨げないような教師の働きかけも大切である。発問のタイミングや考える場の確保，個人の考えを全体に共有させる場面や数学の舞台にのせる（数学化）場面での全体のコントロールなどである。生徒にどのような問いをもたせるかを考えた，教材づくり・教師の役割が重要となる。

具体的に,授業過程の中で生徒にもたせたい問いとして,中村享史氏は以下の８つを挙げている(中村享史著『自ら問う力を育てる算数授業』より)。中村氏は，小学校算数の授業の実践を例に挙げながら，これら８つの問いをもたせる場面について，その価値を述べている。中学校数学では，論証指導をはじめとして，数学の体系を意識した指導が必要となる。その際には，演繹的推論が活躍することになる。そこでは，ある仮定を設定すると，どのような結論が導かれるだろうかという問いが考えられるが，この問いは中村氏の挙げている８つの問いのいずれかに該当するであろうか。中村氏の８つの問いを基盤としながら，中学校数学における問いとして，具体的な事例に基づいて再検討をしていきたい。

①　既習事項を問う	②　他の方法を問う	③　根拠を問う	④　共通点や類似点を問う
⑤　相違点を問う	⑥　一般性を問う	⑦　発展性を問う	⑧　よさを問う

(2)　生徒に問いをもたせる教材のあり方

数学における生徒に問いをもたせる教材とは，課題に生徒が解決したくなるような必然性があり，数学的に豊かな内容を含んだものである。そのような教材を，これまでの研究で「作業を重視した授業の創造」というテーマのもと，実践を積み重ねてきた。今後もこれまでの研究と同様，さらなる教材開発をし，よりよい教材を増やしていく必要がある。そのためには，教師自身が日頃から探していく姿勢が大切である。

中村氏は，問いを生む教材や問題には以下のような５つの条件のうちのいずれかを含んでいるとしている。これについても，中学校数学の視点で見直し，具体的な事例に基づいて再検討をしていく必要がある。

①　既習の学習内容を用いて自力解決できるもの	②　共通の課題を生み出すもの
③　解決の方法や結果に多様性があるもの	④　対立や協調，葛藤や納得を生むもの
⑤　新しい課題を生むもの	

(3)　生徒に問いをもたせるための教師の役割

生徒に問いをもたせるよい教材を，いくら開発できたとしても，その課題をただ生徒に提示しただけでは，生徒にとって解決したくなるような数学の課題となるとは言えない。教師がどのような資料を提示し，どのような発問によって生徒に課題を与えるかが重要となる。あるいは，生徒に作業をさせることによって，生徒に課題を見いださせるかもしれない。開発した教材が，しっかりと生徒にとっての数学の課題となるように，授業におい

て教師が果たすべき役割について考えていく必要がある。そのためには，教師自身が数学について充分に考えること，日々の授業における発問や板書などについて十分な注意を払い，謙虚な姿勢で研究を進めていくことが大切である。

(4)　生徒の問いをどう見取るか(表現活動・評価)

①　『表現活動』について

１つの活動で生徒の表現力を飛躍的に向上させるというよりも，日々の地道な活動により徐々に向上させていくものである。したがって，以下のような活動を継続的にかつ丁寧に行いたい。ただし，これらの活動は，個人で考える時間を十分に保証することを前提としたものである。

- ペア学習，グループ学習，一斉指導などの場面において，自分の意見や考えを相手に理解してもらえるよう工夫をして伝え合う活動。議論。(図や記号を利用したり，筋道を立てて説明したりすることも含む。)【言語活動】→他者評価(生徒どうしの評価と教師のフィードバック)
- 見直したときに授業の内容がわかるようなノートづくり（板書されたものを写す活動ではなく，友人の発言や先生の言葉を書いたり，自分が必要だと判断したものを書いたりして自分だけのオリジナルノートにする)【文章表現】→自己評価と他者評価（教師のフィードバック）
- 友人の意見や自分が理解した内容，授業を通して感じたことなどをまとめた学習感想の記入（毎日の授業での記入を継続させ，少しずつ内容を洗練させていく。)【文章表現】→他者評価（教師のフィードバック）

②　『学びの評価』について

じっくり考えながら活動ができる時間を確保したり，ペアやグループで議論させたりする時間をとることで，その時間を教師側は机間指導に当てることができる。その場面を利用して生徒の思考の様相を探っていく。全体の課題となり得るような反応が見られた場合には，それを全体で共有し，個人やグループで引き続き考えさせたい場合は，何をしているのかを聞き出す程度にする。全体の課題がつかめていない生徒には，個別指導をする。また，これらの机間指導による見とりは生徒からの授業の評価でもあり，授業改善に生かしたいものである。

授業中の机間指導の他にも，発言やつぶやき，議論の様子，事後のノート，学習感想などから評価することもできる。それらは，上記の学習活動において行われることが多いので，その活動における評価を→の後に記述した。授業の中での見とりについては授業の課題や作業の内容に依存し，状況に応じて行うことが多く，すべてを見とることは当然不可能である。私たちの研究の第一のねらいは，生徒にじっくりと考えさせることを通して数学的なかかわりを見いださせること（「考える力をつけさせる」こと）にあるので，評価することが目的になってしまわないように心がける必要がある。

4　研究内容

(1)　教材を開発し，実際に授業実践を行う。
(2)　授業の最中や授業後の生徒の様子を観察し，教師の役割を探る。
(3)　実践を終えた授業を記録として残し，本校数学科のカリキュラムに位置づける。
(4)　開発した教材に体系的なかかわりを持たせられるようにするなど，よりよい授業にしていく。
(5)　開発した教材を単年で終わらせるのではなく，次年度以降も追実践を行うなどの継続した研究にしていく。

5　研究経過

昨年度から全体総論，教科総論とも新たな研究主題となり，新しいの研究がスタートした。昨年度の研究は，作業を重視することを継続しながら「学びを新たな課題につなげる授業の創造」に迫れるように，まずは教師の役割についてより深めるような研究を進めてきた。具体的な授業として昨年度は，以下の４つの授業実践を行ってきた。

〈１年次（平成23年度)〉

３年	「２数の積を工夫して求めよう～因数分解～」	６月 3日(金)	校内研究会授業	櫻井順矢
１年	「文字式の導入」	６月29日(水)	第１回事前研究会	井上　透
２年	「三角形の角の二等分線について考えよう」	10月22日(土)	中等教育研究会	萩原喜成
３年	「何mの高さからボールを落とせばよいだろうか」(関数$y=ax^2$)	10月22日(土)	中等教育研究会	櫻井順矢

６　研究の成果と課題

昨年度の取り組みの中で，以下の点が課題としてあげられた。

（１）　一昨年度までの教科の研究主題にあった「作業を重視する」ということと，「学びを新たな課題につなげる」ということの関係はどうなっているのかはっきりさせたい。「作業」の中でも試行錯誤する場面があったが，これはまさしく学びを新たな課題につなげているのではないか。

（２）　考える力をつけさせるために問うのである。したがって，問うことが目的になってしまっては本末転倒である。

「学びを新たな課題につなげる授業」ということは，課題を設定し，その課題を解決したら終了ということではなく，その学びからまた次の課題につながっていくような授業，問いが連続して生まれてくるような授業をイメージして設定している。また，作業をする中で新たな問いが生まれたり，教師が問うことで作業が始められたり，進んだりするような授業ができたらと考えている。つまり，これらの授業はすべて作業を通して授業が展開していくようになっており，これまでの研究を別の視点から捉え直した研究と考えてよいのではないか。

また，１年目の研究を通して，次の成果が得られた。

（１）　課題が何より大切であるということはこれまでも出されていたが，特に，教材研究をする上できちんとした視点を持って教材研究をすることが大切であるということ。

（２）　授業における教師の役割が大切であり、幾つかのポイントが出されている。その中でも，じっくり考える場面を意図的に設定するときに，個人で考える場面も大事であるが，グループ学習やペア学習などの学習形態を取り入れることも効果的なのではないかということ。

７　今年度の研究

今年度の研究も，作業を重視することを継続しながら，「学びを新たな課題につなげる授業の創造」に迫れるような研究を進めてきた。今年度は，以下の５つの授業実践を行った。

〈２年次（平成24年度)〉

１年	「正負の数の減法を数直線上の移動で考えよう　～正負の数～」			
		５月 ２日(水)	校内研究会	櫻井順矢
１年	「平均身長が等しくなるようにチーム分けをしよう　～正負の数～」			
		６月27日(水)	第1回事前研究会	櫻井順矢
２年	「１次関数」	10月 ６日(土)	中等教育研究会	井上　透
３年	課題学習「条件にあう長方形を考えよう」	10月 ６日(土)	中等教育研究会	萩原喜成
１年	課題学習「バスケットボールの選手を選ぼう」	２月13日(水)	校内研究会	櫻井順矢

次ページより，中等教育研究会における２つの実践事例についてまとめておく。

《参考文献》

長田新著　　「教育学」　岩波書店　第８刷（1933）

半田進編著　「考えさせる授業　算数・数学　実践編」東京書籍　第１刷（1995）

松原元一著　「数学的な見方考え方　子どもはどのように考えるか」国土社　初版（1990）

松原元一編著「考えさせる授業　算数・数学」東京書籍　第１刷（1987）

中村享史著　「自ら問う力を育てる算数授業～新しい学力観と教師の役割～」　明治図書（1993）

杉山吉茂著　「中等科数学科教育学序説」杉山吉茂教授講義筆記　東洋館出版社初版第一刷（2009）

杉山吉茂著　「教育学研究全集　第13巻　考えることの教育」第一法規（1977）

山梨大学教育人間科学部附属中学校　研究紀要（2005～2011）

【実践事例】中等教育研究会　公開授業　　　授業者：井上　　透

１．単元名　１次関数
（中略）
２．指導と評価の計画（全18時間）

①１次関数の導入	１時間	１８時間
②１次関数の式	１時間	
③１次関数の値の変化	１時間	
④１次関数のグラフ	４時間	
⑤１次関数を求めること	２時間	
⑥１次関数とみなすこと	２時間（本時はその１／２）	
⑦２元１次方程式のグラフ	３時間	
⑧１次関数のグラフの利用	１時間	
⑨連立方程式とグラフ	１時間	
⑩問題演習・小テスト	２時間	

３．本時の授業について
（１）日時　　　平成24年10月６日（土）　11:10〜12:00
（２）場所　　　山梨大学教育人間科学部附属中学校　２年１組教室（２階）
（３）題材名　　「富士山の何合目にいたのか，推理してみよう」
（４）ねらい　　実際のデータをもとに，計算して予測を立てたり，グラフを予想して定規をあてたり，実際にグラフをかくなどの作業を通して，問題解決することができる。
（５）生徒に問いをもたせるための手だて

本時の学習は平成20年度全国学力調査，数学Ｂの結果をふまえ，数学を用いて問題解決に迫る学習機会を設けていく必要性を感じ，本時では学力調査でも扱われた山梨県内６地点の気温と標高のデータをもとに，気温と標高の関係を１次関数と仮定し，与えられていない標高の気温を予測する授業を行うこととした。気温がほぼ一定の割合で変化することについては，教科書でも取り上げており（東京書籍「新しい数学」p.57），中学校理科でも気圧の変化の単元でも学習する。気温と標高の関係は，一般的に気温を予測する際にも用いられることが多く，変化の割合をほぼ一定とみなすことのできる，すなわち１次関数としてみなすことに適した題材であると考える。

問題解決に数学を用いる学習経験は，数学を学ぶ意義を見いだす上でも必要なことである。数学的処理などの手続きを学習し，応用問題として文章題を解く，ということだけでなく，数学を活用することで数学の有用性を生徒に感じさせる授業が必要であると考え，平成20年度の調査問題をもとに本題材を設定した。

本時の学習では，データを用いて数学の舞台にのせ，課題について考察することをねらいとする。数学を用いて処理を施し，予測を得る上で，まず事象について様々な議論をすることが必要である。問題を解決するのに気温を調べるのに，どんなデータが必要であるか，そしてそのデータからどんなグラフがかけ，どんな式が立てられたのか，そのグラフや式の計算によって得られた結果からどのようなことがいえるのか，などいくつもの問いが生まれるものと思われる。

（６）展開

過程	指導内容・学習活動	予想される生徒の反応	指導上の留意点 「問い」について
導入	１　一通のメールを紹介する。 私は今，富士山に来ています。 山小屋に一泊し，今からご来光を見に山小屋を出発して，山頂を目指します。 今の気温は，約10℃。眠いし，寒いですが，がんばって行ってきます。(8/10 23:02)	・富士登山だ。 ・私も登ったことがある。 ・富士山は夏でも気温が低い。 ・山は高いほど，気温が低くなる。	・これまでの生活経験などから，標高が高くなると，気温が低くなることを想起させる。

<table>
<tr><td>課
題
の
把
握</td><td>2　学習課題を把握する。
・このメールの送り主は，富士山のどのあたりにいたのだろうか。推理してみよう。</td><td>・そんなことわかるのかな。
・気温だけしかわからないのに，どこにいるかなんてやっぱり判断できないと思う。
・出発時間はわかっているのだから，山小屋から山頂までの所要時間がわかれば，居場所がわかるのではないか。
・歩く速さが変われば，所要時間も変わってくる。
・標高が高くなれば，気温が下がるから，その関係がわかれば，予測できるかもしれない。
・標高と気温の関係を調べよう。</td><td>・調べるには，どんなデータが必要か議論させる。

・気温は標高に対し一定の割合で変化することを確認する。

【根拠を問う】
【既習事項を問う】</td></tr>
<tr><td>活
動
す
る</td><td>3　問題を解決する（自力解決）。
2012.8.10　23時の各地の気温
<table><tr><td>地点</td><td>標高</td><td>気温</td><td>地点</td><td>標高</td><td>気温</td></tr><tr><td>甲府</td><td>273m</td><td>26.7℃</td><td>河口湖</td><td>860m</td><td>21.4℃</td></tr><tr><td>勝沼</td><td>394m</td><td>25.7℃</td><td>山中</td><td>992m</td><td>20.3℃</td></tr><tr><td>古関</td><td>552m</td><td>24.8℃</td><td>富士山</td><td>3775m</td><td>4.2℃</td></tr></table>
・気温と標高の関係をグラフに表し，標高と気温の関係を調べる。</td><td>・標高と気温のデータを，方眼紙上で点に表し，散布図からどのような関係になっているかを調べる。</td><td>【既習事項を問う】</td></tr>
<tr><td>検
討
す
る</td><td>4　自分の考えと他の考えを比べ，検討する(小グループでの検討)。</td><td>・グラフのかき方によって，判断が異なってくることに気づく。</td><td>・どのようにグラフをかいたか互いに説明する機会を持たせる。
【共通点・類似点を問う】
【相違点を問う】</td></tr>
<tr><td>発
表
す
る</td><td>5　検討した結果を発表する。
・どのようにして判断したのか，解決の手順を追って発表する。</td><td>・どのように考えてグラフをかき，判断に至ったのか，互いの意見に耳を傾ける。</td><td>・机間指導しながら，解決が最後まで至らなかった生徒でも，多くの生徒に知らせたい考えは発表させるようにする。</td></tr>
<tr><td>ま
と
め</td><td>6　本時の学習を振り返る。
・学習の中で興味を持ったこと，難しかったこと，苦労したこと，発表を聞いて思ったことなど，学習感想を書く。</td><td>・学習感想を回収する。</td><td></td></tr>
</table>

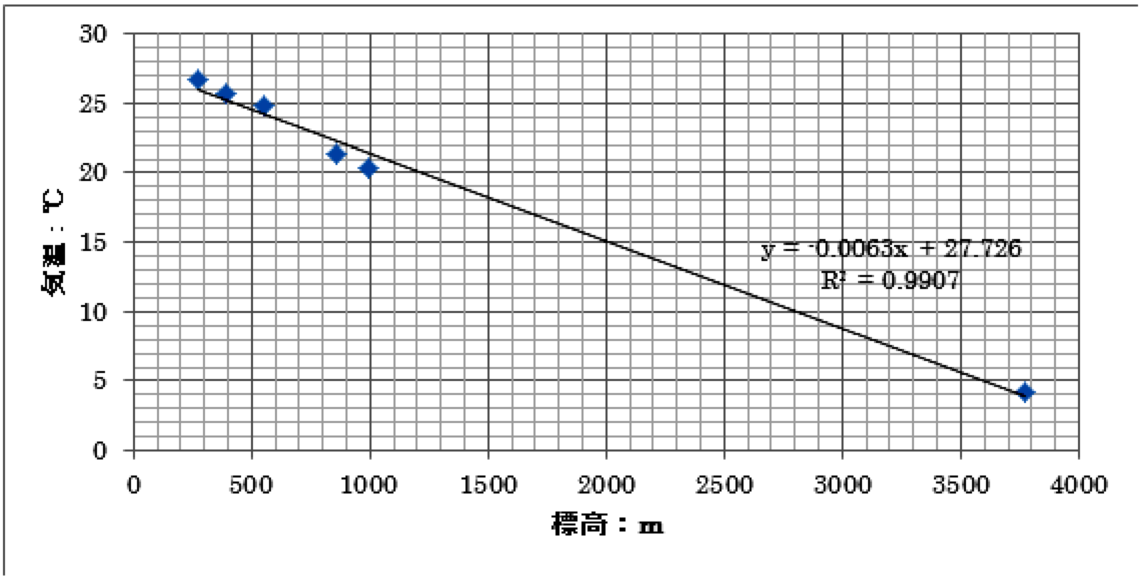
（7）本時の評価

〇授業の中で，質問・意見や作業の様子をみる。

〇解決の手順を記録させたノートや学習感想から，どのように考え解決に至ったかをみる。

＜参考資料＞

◎ ６地点の標高と気温の回帰直線について



４．本授業の成果と課題～生徒の問いの見取りに焦点をあてて～

今回の授業では，生徒が問題解決のために，どんなデータが必要であるかを考え，次に計算して予測を立てたり，グラフを予想して定規を当てたり，実際にグラフをかくなどの作業を行い，得られた結果を問題と照らし合わせ妥当性について考えるとともに，発表を通して他の考えや意見に耳を傾け，自己の学習（作業）について振り返り，さらによりよい解決方法（説明）を追求していくことを生徒にさせたいと考えていた。授業者としては，生徒が問いをもち，考えながら，問題解決に向かわせることをイメージしていた。

今回の授業を終えて，生徒たちがノートに記述した学習感想に目を通してみると，多くの生徒がこの富士登山の事例は既習内容（標高と気温の関係）と同様の事象で，今回の問題解決に１次関数を用いることができると判断していることがわかった（※感想１）。ただし，授業の中で１次関数とは考えずに，反比例ととらえることもできるのではないかという生徒の発言もあり，研究会でも指摘があったが，生徒が１次関数を用いる根拠にまで迫って議論させる必要があったと思われる。「数学の舞台にのせる」すなわち数学を活用する場面において，議論・吟味を通して，なぜそれを活用してよいのか，その根拠を明らかにする活動が重要であることを忘れずにおきたい（※感想２）。

また，１次関数とみなした上でも，生徒たちはさらなる疑問も感じたようである。それは，どのように変化の割合を決めればよいのかということである。富士山を除く５観測点のうち，３観測点は中西部地域にあり，２観測点は東部地域にあるゆえに，標高と温度変化にずれがあり，単純に１次関数とはならないため，どの観測点のデータを用いればよいのか，それとも全てのデータから得られた数値を平均化したほうがよいのか，といったことも考えたようである（※感想３）。これもまた生徒自身が抱いた問いであり，１次関数を活用する学習においては有益な意見であると考える。

他にも，標高と気温の関係を表した１次関数としてとらえる以外に，登山で歩く速さやご来光の時刻（日の出の時刻）などがわかれば，標高と気温の関係でなくても居場所が推理してみたいという意見もあった（※感想４）。

生徒たちの問いは実に様々であり，今回の学習では学習感想からもそれらがうかがうことができた。

しかしながら，実際の授業の中では，教室全体で考えたり，吟味したり，議論したりするだけの時間が十分でなく，また板書を用いたそれぞれの考えの視覚化もなされなかったため，その分生徒の考えにも曖昧さが残ってしまったのではないかと反省している。また，先にも述べたように，教材研究にまだまだ粗さがあったため，生徒に何を問わせ，考えさせたいのかが拡散してしまい，生徒も議論・吟味のポイントが今ひとつ掴みにくかったというところも課題である。また，発展性という視点からみても，検討の余地は十分あると思われる。

教材研究するにあたり，数学を活用するということについて，単に既習事項を日常事象に適用すればよいというのではなく，どのような事象に対して適用すればよいのか，その前提となる仮定を明らかにするところにも視点をおいて，検討していく必要があることを今回の授業で実感した。今後，より具体的に問いを想定しながら，さらに研究を深めていきたいと考える。

（※感想１）

必要と考える情報も標高の出し方も人それぞれで
おもしろかった。
今回の課題は少し前に1次関数の問題としてでて
きたものと標高と温度の関係という点が共通して
いたので、1次関数のグラフや式を使って考えた人
が多かった。私もそうやって考え、やはり２つの一定の数
値があるものには1次関数が向いていると思った。

㊙
今回、1度気温が下がると標高が何m上がる
かと考えた。これは最終的に $y=ax+b$ の式に
できると思った。僕の考えた式だと、
$y=-155.6x+3775$ となると思った。今回は式で
全部考えたから、次はグラフでやってみたいと
思った。

私は教科書にあった"1km高くなると6°C下がる"を基にして　おおよその目安をまず求めた。
だが、この"6°C下がる"というのは山のある地域によっても異なってくるので正確ではない。しかし、
だいたい2800mくらいなのだろうという予測はできた。
友達の中には各地の気温データから　何メートルで1°C下がるかの平均を出している人がいた。
このようにすると　私よりも（山梨の平均なので→）正確な値が出ると思う。
また、グラフを書いて　かき線で求めるやり方も　おもしろいと思った。
正確ではないが、平均から求めることがいちばんの近道だと思う。

（※感想２）

グラフで書くと、1次関数になりかと思った。座標でおよそを
とっていって、直線にすると、値がでる。また、野村くんの考え
がとてもおもしろかった。そのような考えもなかなか良いと思う。

学習感想
何と何を基準にして考えるのかということを
考えるのが少し難しかった。友達と出た答えが
違って、やり方が少しでも違えば出る答えも
かわってくるんじゃないかなと思います。私は、
甲府と勝沼の標高の違いを求めてから、計算
しましたが、1℃で標高〜という風に考えるのはいいが
そこから答えを出すのが難しかった。若月くんや大臣の意見なども新しい観点で自分が
気付かないところばかりだ。

（※感想３）

今回は、少ない情報の中から、ある人が富士山のどの辺りにいるのか
ということを考えた訳ですが、私は皆同様直線から求めていきました。
とはいっても、引き方にもいろいろあるので、どういう直線を引こうか迷い
ました。最終的には、富士山のまわりの河口湖と山中と富士山頂の平均の
直線で出しました。他の人の意見を聞いて、グラフだけではなく、表からわか
ることを少しずつ分析して出す方法もあることが分かり、それでも試してみよう
かなと思いました。結果はわかりませんが、少しでも本当の情報からわかること
を正確にもっていって考えることの大切さを改めて身に感じました。

学習感想
何と何を基準にして考えるのかということを
考えるのが少し難しかった。友達と出た答えが
違って、やり方が少しでも違えば出る答えも
かわってくるんじゃないかなと思います。私は、
甲府と勝沼の標高の違いを求めてから、計算
しましたが、1℃で標高〜という風に考えるのはいいが
そこから答えを出すのが難しかった。若月くんや大臣の意見なども新しい観点で自分が
気付かないところばかりだ。

今回は、少ない情報を使ってどのように
して答えを出すか、ということを考えました。
私は、甲府と勝沼の標高と気温の差を
出して単純な答えしか出せませんでしたが、
人の意見をきいてなるほどと思うことが
たくさんありました。

（※感想４）

私は平均したが、
西沢さんの言う位置的
な問題は大切だと思う。
計算した中でも90mで1°C
のところもあれば172mで1°C
のところもあったので平均は
ちょっと無理やりだったかも
しれない。
山中の気温さえあれば
10°Cくらい…とか、10°Cとの
差を考える…とか、そういった
発想が生まれなかった。
でも、そっちのやり方のほうが
より正確に求めることが
できそうな気がした。
また、最初に出てきた
日の出と歩く速さなどで
も求めてみたいと思った。

【実践事例】中等教育研究会　研究授業　　授業者　萩原喜成

１　課題学習　　「条件にあった長方形を考えよう」

２　指導計画

第３章　　「２次方程式」

(1)　２次方程式とその解き方　　(2)　２次方程式の利用　　　　　　　　　　　　１７時間

課題学習　「条件に合った長方形を考えよう」

① ２辺の長さが一定で面積最大の長方形を見つけよう　　１時間　｝２時間

② ３辺の長さが一定で面積最大の長方形を見つけよう　　１時間(本時)

第４章　　「関数$y=ax^2$」

(1)　関数$y=ax^2$　　　　　(2)　いろいろな関数　　　　　　　　　　　　　　１２時間

３　本時の授業

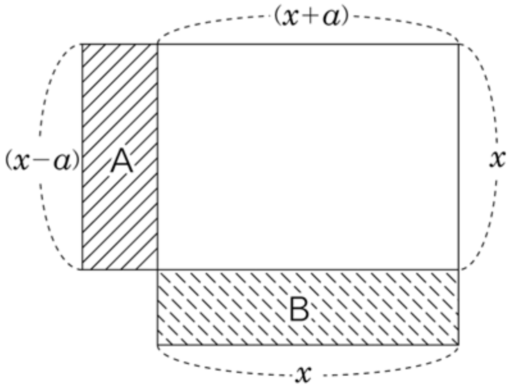
（１）　日　時　　平成24年10月６日（土）　午前10:10～11:00

（２）　場　所　　山梨大学教育人間科学部附属中学校　第３学年４組教室　（３階）

（３）　題材名　　「条件にあった長方形を考えよう」

（４）　題材について

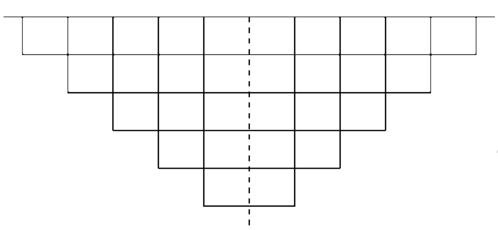
まず、周の長さが一定（縦と横の長さの和が一定）の長方形で面積最大のものは正方形である。それは、縦と横の和を２xとして、縦の長さを（$x+a$）、横の長さを（$x-a$）で表すことにより説明できる。このとき、面積は（$x+a$）（$x-a$）＝x^2-a^2となるので、この面積が最大になるのはa^2＝０のときで、長方形が正方形になったときである。生徒は直感で面積が最大になるのは円になるときで、円に近い形をつくることで面積は最大になるという感覚を持っているようである。



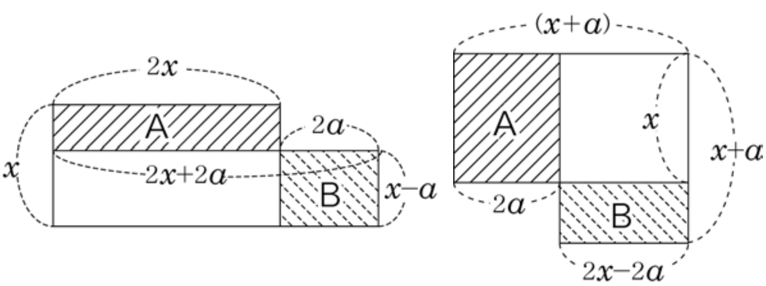
上の考えを図形的に見るとx^2とx^2-a^2の差を考えたとき、図のＢとＡの差になるので、axとa（$x-a$）だから、axの方が必ず大きいことになるのである。この考えは、長方方形が必ず正方形－正方形の形に変形できることと同じである。$x^2+2ax=(x+a)^2-a^2$となることを生徒は長方形の紙を折る作業を通して学習し、面積の変化のイメージを持っているが、この図による考えはまさしくこの変形に当たる。

次に、３辺の長さの和が一定の長方形で面積最大のものを考えると、それは、３辺の中に両対辺が含まれる方の辺の長さを１としたときに、もう一方の辺の長さが２となるような長方形である。正方形が面積最大であると考えている多くの生徒にとってはここで疑問が生まれ、「なぜだろう」とか「どうなっているのだろう」と自ら問う場面になるはずである。そのことで、生徒の思考が始まるのである。おそらく生徒は表を書いて面積の変化を追うことで６ｍ×12ｍ＝72ｍ２が面積最大になることに気づくであろう。また、その根拠を問うと、表やグラフでは具体的な数値を扱うことになるので、どれだけ細かく見てもすべての値に対して確認できるわけではないから一般化する必要があることに気づく。あるいは図をかいて検討を始めるのである。図をかく生徒には以下のような２パターンが予想される。

パターン１



パターン２



パターン１は、縦が１増えると横が２減る関係を真ん中を揃えてかくと、前時の課題で取り組んだ最大が正方形になるものを２つ合わせた構造であることを示している。

パターン２は予想した最大値のx×２x＝２x^2に対して、縦をa長く(短く)すると、横は２a短く(長く)なるのでＡ＝２a×x＝２ax(Ａ＝a×２x＝２ax)に対して、Ｂ＝a×(２x－２a)＝２ax－２a^2(Ｂ＝２a×($x-a$)＝２ax－

$2a^2$)なので、いつでもＡの方がＢより$2a^2$大きいことがわかる。

一般化については文字式で表した式を変形することで最大を示すのである。本授業では、３辺の和が24mなので縦xmに対し横が$(24-2x)$となるので面積は

$$
\begin{aligned}
x\times(24-2x) &= -2x^2+24x \\
&= -2(x^2-12) \\
&= -2(x^2-12+36-36) \\
&= -2(x^2-12+36)+72 \\
&= -2(x-6)^2+72
\end{aligned}
$$
と平方完成の形で表せる。

この式を読むと$(x-6)^2$は平方の形なので$(x-6)^2\geqq 0$で$-2(x-6)^2\leqq 0$になるので$-2(x-6)^2=0$のとき、面積は72で最大になるのである。平方完成の式をこのように解釈することは高校数学でも行わないことなので、２次式のまとめとして中学校でここまで考えさせることは価値の高いことではないかと考える。

（５） ねらい

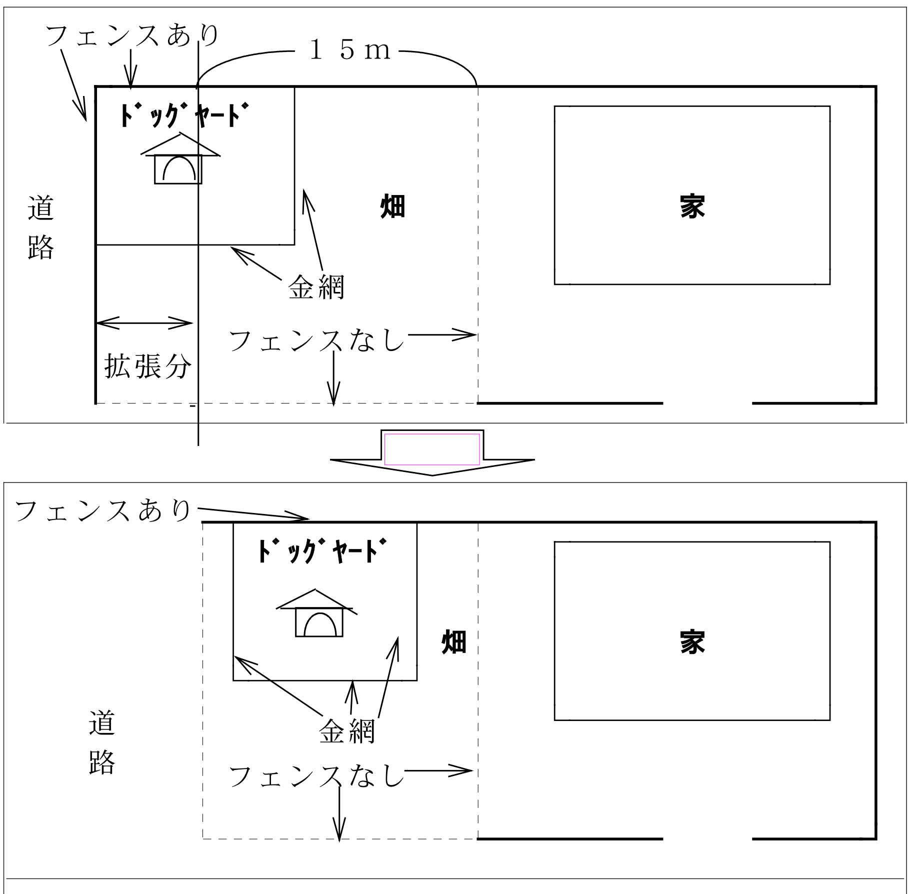
・自分なりの方法で答えを出すとともによりよい考えがないかをあきらめずに粘り強く考えようとする。

・既習の学習内容を総動員し、式・表・グラフ・図形などを使って考えることができる。

・友達の考えを聞いてその視点を知り、自分の考えを深める。

（６）展開

<table>
<tr><th>過程</th><th>学習内容および生徒の活動</th><th>予想される生徒の反応</th><th>指導上の留意点
「問い」について</th></tr>
<tr><td>導入

課題
提示
把握</td><td colspan="2">

カズオさんの家の周辺では、道路が拡張されることになりました。計画では上の略図のように、畑の横の長さが１５ｍになってしまいます。また、道路側のフェンスもなくなってしまうので、ドッグヤードの計画を次のように変更することにしました。</td><td>・課題提示を丁寧に行い、課題に興味を持って主体的に取り組ませる。

・学習シートを配布する。</td></tr>
</table>

① 全体の形が長方形になるようにつくり、そのうちの一辺は畑にあるフェンスを利用する。
② 残りは２４ｍの金網を折り曲げてつくる。
③ ２４ｍの金網をすべて使いきる。

このとき、次の条件にあうドッグヤードについて答えなさい。

発問１　ドッグヤードの面積が最大になるように縦と横の長さを決めたい。それぞれ何ｍにすればいいか。

・前回同様に正方形が最大だと思うので縦、横ともに８ｍのときに面積が６４ｍ^{2}で最大になるだろう。

・縦が７ｍ、横が１０ｍのとき長方形の面積は７０ｍ^{2}になるので、６４ｍ^{2}が最大ではない。

課題追求（自力解決）

発問２　長方形の面積が最大になるときの縦と横の長さはそれぞれ何ｍになるか答えなさい。

・縦横の長さと面積の関係を追う。
長さの合計が２４ｍになるときの面積の変化の様子で判断する。
答え　縦が６ｍ、横が１２ｍのときに面積は７２ｍ^{2}で最大になる。

縦の長さ	横の長さ	面積
４ｍ	１６ｍ	６４ｍ^2
５ｍ	１４ｍ	７０ｍ^2
６ｍ	１２ｍ	７２ｍ^2
７ｍ	１０ｍ	７０ｍ^2
８ｍ	８ｍ	６４ｍ^2
９ｍ	６ｍ	５４ｍ^2
１０ｍ	４ｍ	４０ｍ^2

・机間指導をして生徒の様子をメモする。
・自分の言葉で説明させる。

発表

・机間指導をして生徒の様子をメモする。
・1つの考え方だけでなく、他の考え方でも取り組むように指示を出す。

課題提示把握

発問３　この結果が本当に正しいか確認する方法はないだろうか。
個人で考えた後、各グループから出された意見をまとめていく。
・（グラフから）面積の変化は対称になっているから。
・縦の長さが６ｍになる付近をもっと細かく確認して判断する。

課題追求

縦	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0	6.1	6.2	6.3	6.4
面積	71.68	71.82	71.92	71.98	72	71.98	71.92	71.82	71.68

・要望があれば計算機やグラフ用紙を配る。

発表

練り上げ（グループ学習）

・縦の長さと横の長さの関係

$\left.\begin{array}{l} 2x+y=4 \\ xy=a \end{array}\right\}$ で a が最大になる $x,\ y$ を考えること。

・式を平方完成させてその意味を考える。

$x(24-2x)=-2(x-12)^2+72$

・図を工夫することで、正方形２つをあわせたものと見なすことができ、前回と同様の考えが利用できるから。

・自分の言葉で説明させる。
・友達の意見を聞く中で、この問題の構造に気づかせたい。

まとめ

気づいたことの確認をする。
・学習感想を書く。

・今日の授業で学んだことやおもしろかったこと、役に立つ考えなどをまとめる。

・出された意見をまとめる。

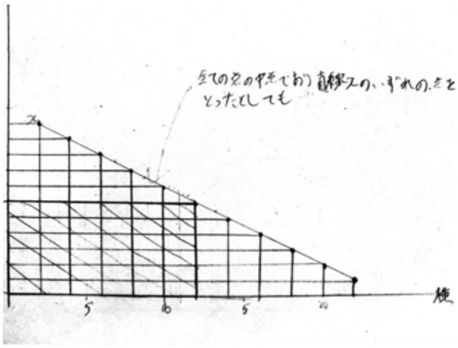
（７）　成果と課題、生徒の見とりについて

本授業では自力解決の時間を多くとり、生徒の思考の様相を確認したいと考えた。実際の授業では、正方形（面積64m^2）ではなく、面積72m^{2}の長方形が面積が最大になることの予想と確認に時間がかかり、自力解決の時間を充分に確保できなかった。結果として練り上げやまとめの部分で充分議論を重ねるところまでは行かなかった。見とりについては、机間指導で観察したことも含め、ノートの記述で確認し評価することにした。

難易度の高い課題であったので、充分な理解には至らない生徒も見られた。しかし、自分なりに工夫して根拠を見つけようとしたり、話し合いをする中で納得したりしていた。以下に、いくつかの生徒の考えと、授業における様子について載せる。

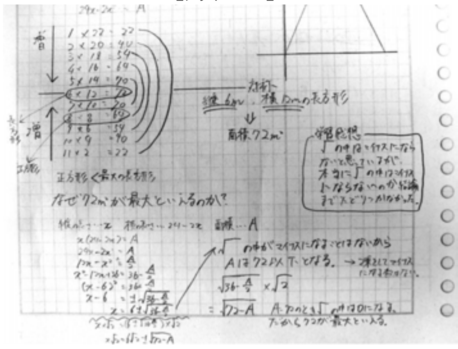
【方法１】は、面積の変化の様子を図に表して考えている。このとき、面積最大にの長方形は、全体を直角三角形と見たときに、その中点を頂点とした長方形である。この長方形は、直角三角形の半分の面積を持つ長方形で、その他の長方形はこの長方形より面積は小さい。それは、この直角三角形の紙を長方形の辺で折ったとき、面積半分の長方形以外では長方形に重ならない部分が出てしまうことからも簡単に説明することができる。この生徒は、この考えがイメージできているようだがことが、きちんと表現できるところまでは行っていないようである。

【方法１】



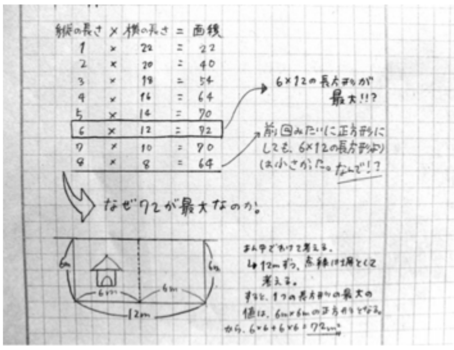
【方法２】は縦の長さを１ｍから順次増やしていったときの面積の変化の様子を調べ、その対称性から最大を見つけている。その後、立式して72が最大になる説明をしている。学習感想にもあるとおり、√の中がマイナスにならないのか理解するのに時間がかかり、納得する説明は完成しなかったようである。しかし、この考えは、平方完成に近い考えをしており、どう考えると最大がわかるのかとか、式をどう読むかという違いで立式の形が違っているだけである。したがって、式だけで72が最大になる説明ができる可能性を持った解答である。

【方法２】



【方法３】は、まず方法２と同様に、縦と横の長さの変化で面積の大きさを探り、正方形のときよりも面積が大きくなる場合があることを知り、それに疑問を感じているようである。次に、なぜ72が最大になるのかを考え、正方形に結びつけようとするなかで、長方形を真ん中で２つに分けることにより、前時の考えが利用できることに気づいている。つまり、図の中では、点線を塀だと考えると左右対称の２つの長方形に分けられ、その長方形は２辺の和が一定の長方形になるので、最大は正方形になるときである。このことから、面積最大の長方形は正方形を２つ合わせた形であると結論づけている。

【方法３】



【方法４】は、グラフを書いてグラフが線対称になることから最大となるxの値を見つけ、そこから最大値を求めている。その後、グラフが２次式のグラフ（放物線）になるのではなかと考え、その検証を始めている。まだ未習の内容でもあるし、$y=ax^2$以外の２次関数は高校の内容になるので、はっきりした結論まではたどり着かなかったようだが「そうみたいだ」というまとめをしている。その後、自分なりにグラフの式を考え、（６，０）を原点にして$y=-2x^2+72$という式を求めている。

この式は$x=0$（実際には$x=6$）のとき面積が最大で72になるという式である。今後の学習の中できちんと理解を深めさせたい。

【方法４】